Chapitre II

CORDES VIBRANTES.

Lasciatemi cantare con la chiratta in mano...

Toto CUTUGNO

On dégage dans ce chapitre et les deux suivants des notions fondamentales sur les ondes qu'on retrouvera dans tous les domaines de la physique, en particulier, cette année, en mécanique des fluides (ondes sonores) et en électromagnétisme (ondes électromagnétiques) y compris dans le domaine de l'optique (optique physique). C'est dire toute l'importance de cette partie riche de notions nouvelles. Le premier chapitre repose sur l'étude d'instruments à cordes, connus depuis la plus haute antiquité, qu'ils soient à cordes pincées (harpe, clavecin, guitare), percutées (piano) ou frottées (violons).

II-1 Analyse dimensionnelle du problème.

La hauteur au sens musical d'un son (aigu/grave) est une manifestation de la fréquence f. Elle dépend de la longueur l de la corde, de sa tension T et de sa masse ou plutôt de sa masse linéïque μ. On vérifie expérimentalement que f croît quand l décroît, T croît et μ décroît.

L'analyse dimensionnelle donne $[f] = T^{-1}$, $[l] = L$, $[T] = MLT^{-2}$ et $[\mu] = ML^{-1}$.

Cherchons trois exposants, α, β, γ tel que :

$$f = l^{\alpha}\, T^{\beta}\, \mu^{\gamma}$$

on doit avoir :

$$T^{-1} = (L)^{\alpha}\,(MLT^{-2})^{\beta}\,(ML^{-1})^{\gamma}$$

En identifiant les exposants de M, L et T, on tire :

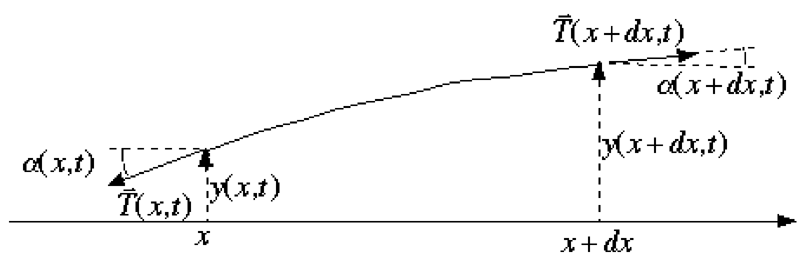
$$\begin{cases} 0 = \beta + \gamma \\ 0 = \alpha + \beta - \gamma \\ -1 = -2\,\beta \end{cases}$$

On en tire $\beta = 1/2$, $\gamma = -1/2$ et $\alpha = -1$ d'où $f \propto \frac{1}{l}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ (à une constante multiplicatiuve sans dimension près) et on remarque au passage que $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ est homogène à une vitesse qu'on notera ici c.

La formule obtenue est conforme aux sens de variation prévus.

II-2 Mise en équation.

Au repos la corde est rectiligne selon Ox entre $x = 0$ et $x = l$. Le mouvement d'un point de la corde peut être supposé transversal, c'est-à-dire perpendiculaire à Ox (en effet, un déplacement longitudinal selon Ox provoquerait un allongement notable d'un des côtés de la corde et un raccourcissement de l'autre ; la raideur de la corde est en pratique très grande, donc il apparaîtrait des forces colossales sur une masse infime). On se limitera ici à des mouvements plans (les mouvements non plans sont possibles et donnent les mêmes résultats). On note $y(x,t)$ le déplacement du point d'abscisse x de la corde et $\overrightarrow{T}$ de module $T(x,t)$ et d'angle $\alpha(x,t)$ avec Ox la force exercée par la portion de corde à droite sur celle à gauche. On néglige les forces de pesanteur (un corde a une masse de quelques grammes donc un poids de quelques dizaines de millinewtons et une tension de quelques centaines de Newtons).



Le principe fondamental de la dynamique, à un bout de corde $x/x+dx$ de masse $dm = \mu\,dx$ donne après projection :

$$0 = T(x+dx,t)\,\cos(\alpha(x+dx,t)) - T(x,t)\,\cos(\alpha(x,t))$$

$$\mu\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx,t)\,\sin(\alpha(x+dx,t)) - T(x,t)\,\sin(\alpha(x,t))$$

L'approximation des petits mouvements donc des petits angles et un développement limité de Taylor à l'ordre 1, plus $\alpha \approx \tan(\alpha) = \frac{\partial y}{\partial x}$ conduisent respectivement à :

$$T(x+\mathrm{d}x,t)=T(x,t) \quad \text{donc} \quad T(x,t)=Cte \quad \text{qu'on note T}$$

(on exclut le cas où T dépend du temps) et à :

$$\mu\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\,(\alpha(x+\mathrm{d}x,t)-\alpha(x,t))=T\,\frac{\partial\alpha}{\partial x}\,\mathrm{d}x=T\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x$$

d'où l'équation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c^2=\frac{T}{\mu} \quad \text{(cf supra)}$$

qu'on appelle équation de d'Alembert

II-3 Résolution

II-3.a Solutions non excitées.

On recherche des solutions factorisées $y(x,t)=F(x)\,G(t)$, qu'on appelle aussi ondes stationnaires par opposition aux ondes progressives qu'on étudiera dans le chapitre suivant.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=F"(x)\,G(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=F(x)\,G"(t)$$

reportons dans l'équation de d'Alembert :

$$F"(x)\,G(t)=\frac{1}{c^2}\,F(x)\,G"(t)$$

Divisons par $y(x,t)=F(x)\,G(t)$:

$$\frac{F"(x)}{F(x)}=\frac{1}{c^2}\,\frac{G"(t)}{G(t)}$$

où un membre n'est fonction que de x, l'autre que de t, avec égalité pour tout x et tout t, donc des constantes, en effet, si l'on fixe t par exemple à $t=0$, on en déduit que pour tout x, on a $F"(x)/F(x)=(1/c^2)\,(G"(0)/G(0))$, ce qui prouve que $F"(x)/F(x)$ est constant.

Seules les constantes négatives sont intéressantes (sinon il y a explosion ou étouffement).

Si l'on note $F"(x)/F(x)=-k^2$ et donc $G"(t)/G(t)=-(k\,c)^2$, alors $F(x)$ est de la forme $Cte\ \sin(k\,x+\varphi)$, $G(t)$ de la forme $Cte\ \sin(k\,c\,t+\psi)$ et $y(x,t)=y_{max}\ \sin(k\,x+\varphi)\ \sin(k\,c\,t+\psi)$; on notera désormais $\omega=k\,c$

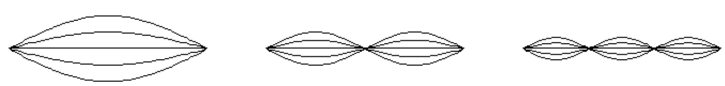
Pour les conditions aux limites classiques : repos en $x=0$ et $x=l$, on tire $\varphi=0$ et $\sin(k\,l)=0$ d'où une quantification $k_p=p\,\pi/l$ avec p entier et $\omega_p=p\,\pi\,c/l$ d'où :

$$f_1=\frac{c}{2\,l}=\frac{1}{2\,l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{et} \quad f_p=p\,f_1$$

On remarque que ce résultat est conforme aux prévisions de l'analyse dimensionnelle ; il précise la constante adimensionnée. Si $p = 1$, on dit que la corde vibre selon le mode fondamental, sinon selon l'harmonique p. De plus toute combinaison linéaire de solutions est solution (structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire).

$y_{max} \sin(p\,\pi\,x/l)$ est une amplitude locale, elle est nulle (nœud de vibration) pour $x_q = q\,l/p$ avec $q \in [\![1, p-1]\!]$ et maximale (ventre de vibration) pour $x'_q = (q + 1/2)\,l/p$ avec $q \in [\![0, p-1]\!]$. On définira plus tard une longueur d'onde par $\lambda_p = 2\,\pi/k_p$, on voit qu'ici $\lambda_p = 2\,l/p$ et que les nœuds sont distants de $\lambda/2$, et de même pour les ventres et $\lambda/4$ sépare un nœud d'un ventre. La période est $T_p = 2\,\pi/\omega_p$ et l'on voit que $\lambda_p = c\,T_p = c/f_p$ D'où l'astuce-aide-mémoire : la fréquence fondamentale s'obtient à partir de $l = \lambda/2$ et $\lambda = c/f$.

Ci-dessous les figures de l'aspect de la corde à différents instants pour le mode fondamental et les harmoniques 2 et 3.

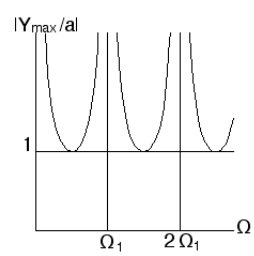


II-3.b Solutions excitées.

Si l'extrémité $x = 0$ est fixe et l'extrémité $x = l$ animée à l'aide d'un vibreur d'un mouvement imposé $b \sin(\omega\,t)$ (corde de Melde), après un éventuel transitoire, on observera une solution sinusoïdale forcée de même pulsation :

$$y_{max} \sin(k\,x) \sin(\omega\,t) = y_{max} \sin(\omega\,x/c) \sin(\omega\,t)$$

(car $\omega = k\,c$, cf *supra*, et donc $k = \omega/c$) d'où, par identification : $y_{max} = a/\sin(\omega/c\,l)$ (cf graphe ci-dessous) et on trouve, bien sûr, des résonances pour $\omega = \omega_p$. En fait, l'existence de frottements fluides empêche l'amplitude de devenir infinie à la résonance et permet aux transitoires de s'étouffer.



II-4 Etude énergétique.

L'élément de corde entre x et $x+\mathrm{d}x$ possède une énergie cinétique élémentaire

$$\delta E_{cin} = \frac{1}{2}\,\mu\,\mathrm{d}x\,\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

En divisant par la longueur élémentaire $\mathrm{d}x$, on introduit une *densité linéique d'énergie cinétique* dont l'expression est $u_{cin} = \frac{1}{2}\,\mu\,\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$. On remarque que c'est une grandeur quadratique qui fait intervenir des termes d'ordre deux.

Ce même élément, qui fait un angle α avec l'axe Ox a subi un allongement (du second ordre)

$$\delta\ell = \mathrm{d}x\,(1/\cos\alpha - 1) \approx \mathrm{d}x\,\frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x\,\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

La tension T a donc exercé un travail, c'est-à-dire fourni une énergie potentielle élémentaire

$$\delta E_{pot} = T\cdot\delta\ell = \frac{1}{2}\,T\,\mathrm{d}x\,\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

.

En divisant par la longueur élémentaire $\mathrm{d}x$, on introduit une *densité linéique d'énergie potentielle* dont l'expression est $u_{pot} = \frac{1}{2}\,T\,\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$.

Ce même élément est soumis de la part de la corde à droite de $x+\mathrm{d}x$ à une force $\overrightarrow{T}(x+\mathrm{d}x,t)$ de module indépendant de x et t noté T, faisant avec Ox l'angle $\alpha(x+\mathrm{d}x,t) \approx \frac{\partial y}{\partial x}$ et s'appliquant à un point de vitesse $v = \frac{\partial y}{\partial t}$ selon Oy, force qui exerce donc la puissance :

$$P_D = T\,v\,\sin\alpha \approx T\,\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{(x+\mathrm{d}x,t)}\,\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(x+\mathrm{d}x,t)}$$

De même, il est soumis de la part de la corde à gauche de x à la force $-\overrightarrow{T}(x,t)$ de puissance

$$P_G \approx -T\,\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{(x,t)}\,\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(x,t)}$$

Notons $P(x,t)$ la fonction $T\,\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{(x,t)}\,\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(x,t)}$; alors en continuant à négliger le poids, la somme des puissances des forces extérieures est :

$$\delta P = P_D + P_G = P(x+\mathrm{d}x,t) - P(x,t) \approx \frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x$$

$$\delta P \approx T\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial t}\right)\,\mathrm{d}x = T\,\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\right)\,\mathrm{d}x$$

En injectant l'équation de propagation et grâce au théorème de SCHWARTZ, on tire :

$$\delta P = \mu\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\frac{\partial y}{\partial t}\,\mathrm{d}x + T\,\frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial x}\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{1}{2}\,\mu\,\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\,T\,\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\,\mathrm{d}x\Big]$$

On retrouve donc naturellement :

$$\delta P = \frac{\partial}{\partial t}\delta E_{\text{méca}} = \frac{\partial}{\partial t}(\delta E_{cin} + \delta E_{pot})$$

Cette loi de conservation peut aussi être formulée ainsi, après division par la longueur élémentaire et en réintroduisant les densités volumiques :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u_{cin} + u_{pot})$$

Ce type de formulation sera généralisée tout au cours de l'année.

Avec $y = a\,\sin(\pi\,x/l)\,\sin(\pi\,c\,t/l)$, on a pour l'élément de corde :

$$u_{cin} = \frac{1}{2}\,\mu\,a^2\,(\pi\,c/l)^2\,\sin^2(\pi\,x/l)\,\cos^2(\pi\,c\,t/l)$$

$$u_{pot} = \frac{1}{2}\,T\,a^2\,(\pi/l)^2\,\cos^2(\pi\,x/l)\,\sin^2(\pi\,c\,t/l)$$

Après intégration sur toute la corde (de $x = 0$ à $x = l$) et avec $\mu\,c^2 = T$ (cf *supra*), les énergies totales de toute la corde sont :

$$\mathcal{E}_{cin} = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{T\,a^2}{l}\,\cos^2(\pi\,c\,t/l)$$

$$\mathcal{E}_{pot} = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{T\,a^2}{l}\,\sin^2(\pi\,c\,t/l)$$

et donc

$$\mathcal{E}_{méc} = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{T\,a^2}{l} = Cte$$

II-5 Séries de Fourier

Faisons le lien avec la théorie des séries de Fourier qui sera étudiée en détail en mathématiques et annonçons-en les résultats essentiels pour le physicien. Une fonction f $2\,l$-périodique peut être assimilée à la série trigonométrique :

$$a_0/2 + \sum_{n\in N^*}(a_n\,\cos(n\,\pi\,x/l) + b_n\,\sin(n\,\pi\,x/l))$$

où les coefficients sont définis par :

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\cos(n\,\pi\,x/l)\,\mathrm{d}x \quad \forall n\in N$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\sin(n\,\pi\,x/l)\,\mathrm{d}x \quad \forall n\in N^*$$

A ce stade, savoir que pour une fonction paire les b_n sont nuls et pour une impaire, les a_n. Pour une corde vibrante comprise entre $x = 0$ et $x = l$ et immobile en ses deux extrémités, on peut, à un instant t fixé, considérer la fonction y(x,t) comme la restriction d'une fonction impaire et $2l$-périodique, on retrouve les solutions développées plus haut puisqu'il n'y a que des termes en sinus dans la décomposition de FOURIER

Remarques musicales : le rapport des fréquences $f_2/f_1 = 2$ entre l'harmonique 2 et le fondamental correspond au passage à l'octave. De même le rapport $f_3/f_2 = 3/2$ correspond à l'intervalle de quinte et le rapport $f_5/f_4 = 5/4$ à celui de tierce majeure.

On dispose aussi du théorème de PARSEVAL :

$$\frac{1}{2\,l}\int_{-l}^{l}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{|a_0|^2}{4} \;+\; \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^{\;2} \;+\; |b_n|^{\;2})$$

Pour le physicien, il s'agit d'un théorème énergétique ; en effet on vient de voir que l'énergie fait intervenir des carrés de fonctions $2l$-périodiques. Le théorème affirme que l'énergie moyenne est somme des énergies moyennes du fondamental et des harmoniques (on rappelle que la moyenne du carré d'un sinus ou d'un cosinus est 1/2) s'ils étaient seuls. Cette additivité ne coule pas de source car *a priori* le carré d'une somme n'est pas la somme des carrés ; le théorème affirme donc que les doubles produits sont nuls en moyenne et leur somme aussi (ce n'est pas évident : il y a une infinité de termes).

II-6 Exercice guidé.

On écarte à $t = 0$ une corde vibrante en lui donnant la forme d'un triangle isocèle de base ℓ et de hauteur a et on la lache sans vitesse initiale. La forme de la corde est décrite comme dans le cours par la fonction $y(x,t)$

1. Pourquoi peut-on écrire :
$$y(x,t) = \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\beta_p\,\sin(\frac{p\,\pi\,x}{\ell})\,\cos(\frac{p\,\pi\,c\,t}{\ell}+\psi_p) \quad ?$$
2. Les théorèmes mathématiques sous-jacents étant admis, en déduire l'expression, sous forme de somme infinie, de $\dfrac{\partial y}{\partial t}$.
3. Pourquoi peut-on écrire :
$$y(x,0) = \sum_{p\in\mathbb{N}^*} b_p\,\sin(\frac{p\,\pi\,x}{\ell}) \quad ?$$
4. Quelle formule permet de calculer les coefficients b_p ? Ce calcul n'est pas un objectif du programme ; on admet qu'il conduit à :
$$b_{2q} = 0 \quad \text{et} \quad b_{2q+1} = (-1)^q\,\frac{8\,a}{\pi^2\,(2\,q+1)^2}$$
On ne reportera pas ces valeurs plus loin (pour alléger)
5. On peut écrire de même :
$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \sum_{p\in\mathbb{N}^*} B_p\,\sin(\frac{p\,\pi\,x}{\ell}) \quad ?$$
Que valent (sans calcul) les coefficients B_p ?

6. En déduire que :

$$\beta_p \cos(\psi_p) = b_p \quad \text{et} \quad \beta_p \sin(\psi_p) = 0$$

   En déduire les valeurs de ψ_p et β_p

7. L'exercice est-il terminé ?